OPTIMIZACIÓN DE RUTAS EN 'CAMINO SEGURO AL COLE'. CONSTRUCCIÓN DE RUTAS CON MEDIOS DE TRANSPORTE ALTERNATIVOS.

BEATRIZ MUNICIO HORCAJO

GRADO EN INGENIERÍA MATEMÁTICA, FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS,
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Trabajo Fin de Grado

3 de Julio de 2013

Directores:

Inés Mª Gómez-Chacón y Victoria López

Autorización de Difusión

BEATRIZ MUNICIO HORCAJO

3 de Julio de 2013

La abajo firmante, matriculada en el Grado en Ingeniería Matemática de la Facultad de Ciencias Matemáticas, autoriza a la Universidad Complutense de Madrid (UCM) a difundir y utilizar con fines académicos, no comerciales y mencionando expresamente a su autora el presente Trabajo Fin de Grado: "Optimización de rutas en 'Camino Seguro al Cole'. Construcción de rutas con medios de transporte alternativos.", realizado durante el curso académico 2012-2013 bajo la dirección de la doctora Dª. Inés Mª Gómez-Chacón y con la colaboración externa de dirección de la doctora Dª. Victoria López en el Departamento de Álgebra, y a la Biblioteca de la UCM a depositarlo en el Archivo Institucional E-Prints Complutense con el objeto de incrementar la difusión, uso e impacto del trabajo en Internet y garantizar su preservación y acceso a largo plazo.

Resumen

La idea de este trabajo surge a partir del proyecto educativo de la Comunidad de Madrid *Camino Seguro al Cole*[1], proyecto que pretende fomentar la autonomía e independencia de los niños y mejorar la seguridad ciudadana en el entorno de los colegios, además de mejorar la movilidad potenciando hábitos de transporte más saludables.

Este trabajo trata de modelizar y resolver algunos de los distintos problemas que se plantean en dicho proyecto, y elaborar un mapa de movilidad más completo. Con este fin, se centra en la construcción de rutas óptimas con distintos medios de transporte, realizándose un estudio de los caminos a pie, en coche y en transporte público. Para la construcción de las rutas se han tenido en cuenta criterios como la seguridad y el tiempo de recorrido, y se deja una modelización abierta para ser utilizada con otros criterios de forma que solo sea necesario introducir la matriz de datos correspondiente. Con esto se permite tanto la actualización periódica de datos, como poder aplicar la modelización para otros criterios o incluso aplicarla a otros colegios, reduciendo los nuevos modelos a un estudio de datos.

En esta memoria se recoge tanto la fundamentacion teórica del trabajo como el estudio de campo. Los datos empíricos proceden de la zona del colegio 'Nuestra Señora de la Paloma' de Madrid, en el que se realizaron encuestas a alumnos y padres de alumnos.

Para finalizar, se ofrecen una serie de conclusiones sobre la correcta utilización de las arañas y los mapas de movilidad obtenidos a lo largo de la investigación.

Palabras clave

Camino seguro, mapa de movilidad, ruta óptima, seguridad, medios de transporte.

---

[1] Enlaces a la documentación del proyecto disponibles en la bibliografía

Abstract

The idea of this paper arises from the Comunidad de Madrid educational project *Camino Seguro al Cole (Safe way to the school)*, a project that aims to promote the autonomy and independence of children and to improve the public safety in the school environment, as well as improve the mobility through promoting healthier transportation habits.

This paper tries to model and solve some of the problems present in *Camino Seguro al Cole* project, and develop a comprehensive mobility map. With this aim, the paper is focused on the construction of optimal routes using different means of transport, by making a study of the paths either on foot, by car or by public transport. For the construction of the routes it is taken into consideration criteria such as safety and travel time, and it leaves a model to be used with other criteria in such a way that it is only necessary to enter the corresponding data matrix. This allows both the regular update of data and the application of the modelling to other criteria or even applying it to other schools, limiting the new models to a mere study data.

This paper includes the theoretical foundation of the work as well as the field study. The empirical data come from 'Colegio Nuestra Señora de la Paloma' area (Madrid), where students and student's parents were surveyed.

To conclude, some solutions about the correct use of Mobility Spiders and Maps obtained in the research are offered and explained.

Keywords

Safe way, mobility map, optimal route, safety, means of transport.

Índice de contenidos

Agradecimientos

A mi familia, por su continuo apoyo y comprensión. A mis compañeros Rocío y Miguel, cuya ayuda ha sido inestimable para la realización de este proyecto. A Dani, por estar siempre ahí.

Quiero agradecer también a los diferentes equipos de profesionales e investigadores de los proyectos: Proyecto *Madrid a pie*, *Camino seguro Ayuntamiento*, Grupo G-Tec de la UCM y la Cátedra UCM Miguel de Guzmán de la Facultad de Ciencias Matemáticas, por la oportunidad de participación y los impulsos recibidos para nuestra formación.

1.- Introducción: contexto y planteamiento del problema

La idea de este trabajo surge a partir del proyecto educativo de la Comunidad de Madrid *Camino Seguro al Cole*[2], proyecto que pretende fomentar la autonomía e independencia de los niños y mejorar la seguridad ciudadana en el entorno de los colegios, además de mejorar la movilidad potenciando hábitos de transporte más saludables. En este proyecto se ha elaborado un mapa de movilidad a pie, donde se fija la ubicación del colegio y el punto de origen de cada uno de los niños. En él se encuentran los caminos óptimos en cuanto al número de niños que transitan por cada calle, consiguiendo de este modo que estos vayan el mayor tiempo posible acompañados por otros en su trayecto al colegio.

El proyecto *Camino Seguro al Cole*, en continua evolución desde su puesta en marcha en 2007, plantea cada año nuevos retos y posibilidades. En el curso 2012-2013 se han llevado a cabo tres líneas de investigación muy distintas sobre este proyecto: una en la Facultad de Informática, consistente en el desarrollo de una aplicación móvil de apoyo a las familias para que los padres ayuden a sus hijos a fomentar su autonomía en la ciudad, acompañándoles en el camino al colegio y enseñándoles a ir solos de forma segura, y otras dos en la Facultad de Ciencias Matemáticas desde la Cátedra UCM Miguel de Guzmán. De estos dos estudios, uno es el recogido en esta memoria, y el otro se recoge en el Trabajo de Fin de Grado “Optimización de rutas en ‘Camino Seguro al Cole’. Construcción y evaluación de rutas seguras.”, realizado por la alumna de último curso de Ingeniería Matemática Rocío Colina Torres, y que consiste en un estudio del camino a pie basado en un análisis jerárquico, implicativo y cohesitivo de los niveles de seguridad de las calles. En el artículo “Un camino seguro de casa al cole, más informático y matemático” publicado en la revista *Tribuna Complutense*[3], la profesora Victoria López declara que "Esto es bueno para la UCM porque hacemos que la sociedad se beneficie de nuestro trabajo, y es bueno también para nuestros alumnos que pueden ver como su trabajo se convierte en aplicaciones reales, lo que en un futuro en su currículo puede tener gran importancia".

Es interesante señalar que parte de la investigación realizada en este trabajo ha sido aceptada para su presentación en el XXXIV Congreso Nacional de Estadística e Investigación

---

[2] Enlaces a la documentación del proyecto disponibles en la bibliografía

[3] Enlace al artículo: http://biblioteca.ucm.es/revcul/tribunacomplutense/84/art1323.php

Operativa y las VIII jornadas de Estadística Pública[4] bajo el nombre "QMR: Modeling quality mobility routes under uncertainty".

Algunas de las preguntas básicas que se hicieron cuando se planteó la realización de este trabajo fueron las siguientes: ¿los caminos obtenidos son realmente rutas óptimas?, ¿los criterios que se han tomado para construir las rutas reflejan la seguridad real?, ¿ha sido eficiente el modo de obtención de las arañas de seguridad?, y finalmente, ¿por qué no construir estas rutas considerando la utilización de otros medios de transporte?

Para poder responder a estas preguntas, se han mantenido varias reuniones con el personal a cargo del proyecto en el Ayuntamiento de Madrid, en las cuales se ha recogido información acerca del proyecto ya realizado, así como sobre las mejoras que les gustaría que se introdujesen en el proyecto. Una de las primeras cosas que destacaron fue la falta de eficiencia en la obtención de las arañas, ya que la realización de las arañas de movilidad hasta el momento ha sido un proceso completamente manual. Por otro lado, hay un gran interés en ampliar los posibles criterios de seguridad, no basándose únicamente en el número de niños que transitan por cada calle, sino también en la perspectiva de seguridad que tienen sobre las calles los padres y alumnos, o en la longitud del recorrido. Además, la posibilidad de construir arañas de movilidad para otros medios de transporte ha abierto un importante abanico de aplicaciones futuras.

El objetivo fundamental de este trabajo es hacer factibles dichas mejoras, y con ese fin en los siguientes capítulos se modelizan y resuelven los distintos problemas planteados y se elaboran algunos mapas de movilidad más completos. Se ha dejado una modelización abierta para que pueda ser utilizada con otros criterios de modo que solo sea necesario introducir la matriz de datos correspondiente. De esta forma se permite tanto la actualización periódica de datos, como poder aplicar la modelización para otros criterios o incluso aplicarla a otros colegios, reduciendo los nuevos modelos a un estudio de datos.

El problema ante el que nos encontramos, por tanto, es cómo obtener una ruta segura sobre un mapa. Si este mapa lo modelamos como una red en la que los nodos representan las intersecciones entre calles, las aristas representan los distintos tramos de calle, y los pesos la seguridad de cada calle, lo que tratamos de conseguir es un camino desde un punto a otro de la red que maximice la seguridad total del camino. O lo que es lo mismo, obtener un camino entre

[4] Página oficial del congreso: http://www.seio2013.com/

dos puntos que minimice la peligrosidad del trayecto. Si consideramos los niveles de peligrosidad como distancias, el problema es buscar el camino de mínima longitud, problema más conocido como el Problema de Camino Mínimo.

1.1 Contexto del Problema

El *Problema del Camino Mínimo* o *Shortest Path Problem* es un problema clásico de Investigación Operativa, trabajado durante décadas en la Optimización en Redes (Garfunkel, 1999). Para comprender bien el contexto de estudio en el que se suele dar este problema, hay que tener claros algunos conceptos de tipo general.

La Investigación Operativa es una disciplina relativamente reciente, el término *Operations Research* fue utilizado por primera vez en Inglaterra en 1941 (Maurette y Ojea, 2006). Robinson la define como la aplicación del método científico en la mejora de la efectividad de las operaciones, las decisiones y la gestión (Maroto, 2002). Estos métodos se centran en el diseño y mejora de las operaciones y decisiones, la resolución de problemas y el apoyo en las funciones de gestión, planificación o predicción, y aportan conocimiento y ayuda en la toma de decisiones. Dentro de las funciones que realiza la Investigación Operativa, hay cinco tareas fundamentales: recoger y analizar los datos necesarios, desarrollar y probar modelos matemáticos, proponer soluciones o recomendaciones, interpretar la información, y ayudar a implantar acciones de mejora.

Tal como establece el Diccionario de la Real Academia Española, se define la optimización como la acción y efecto de optimizar, o búsqueda de la mejor manera de realizar una actividad. Por otro lado, dentro de las definiciones de optimización que se han dado dentro del marco matemático, destaca la de Abraham Duarte, que concibe el proceso de optimización como "*el proceso de intentar encontrar la mejor solución posible a un problema de optimización, generalmente en un tiempo limitado*" (Duarte, 2007:1). En este proyecto se entenderá la optimización como el acto de encontrar una alternativa de decisión con la propiedad de ser mejor que cualquier otra en algún sentido.

Las componentes necesarias para definir un problema de optimización serán la función objetivo, las variables y las restricciones. La función objetivo es la medida cuantitativa del funcionamiento de un sistema que se desea maximizar o minimizar, las variables son las decisiones que afectan al valor de la función objetivo, y las restricciones son el conjunto de relaciones que las variables están obligadas a satisfacer. Resolver un problema de optimización consiste en encontrar el valor que deben tomar las variables para hacer óptima la función objetivo satisfaciendo el conjunto de restricciones.

La importancia del Problema de Camino Mínimo radica en la amplia gama de problemas que se pueden abordar a través de los modelos que lo solucionan, y en el hecho de encontrarse muy frecuentemente en procesos involucrados en la vida cotidiana.

1.2 Planteamiento del Problema: Camino Mínimo

El Problema del Camino Mínimo consiste en encontrar la ruta más corta entre dos puntos de una red. Las medidas que consideramos 'distancias' pueden ser distintos criterios como tiempo, dinero, longitud, etc. La red sobre la que operamos puede ser un entramado de calles, el esquema de un proyecto, una red de ordenadores, etc., y será representada mediante un grafo. Intuitivamente, un grafo se representa gráficamente como un conjunto de puntos (vértices) unidos por líneas (aristas) si cumplen una determinada propiedad. Más formalmente, se define un grafo como un par $G=(V,U)$, donde V es un conjunto finito cuyos elementos $i \in V$ se denominan vértices o nodos, y $U \subset V \times V$ es el subconjunto de arcos $u=(i,j) \in U$.

Los grafos permiten representar relaciones binarias entre los elementos de un conjunto. Por ejemplo, si consideramos una red computacional, los nodos serán los distintos ordenadores y existirá un arco $(v_1,v_2) \in U$ en caso de que los ordenadores v_1 y v_2 estén conectados.

A cada arco se asocia una medida o 'distancia', siendo d_{ij} el peso asociado al arco $(i,j) \in U$. En el ejemplo anterior, esta medida $d_{v1,v2}$ puede ser el coste económico de conectar el ordenador v_1 con el ordenador v_2.

Dentro de los grafos, se hace una división en dos tipos distintos en función de las aristas: grafos dirigidos y grafos no dirigidos. Los primeros, representan los enlaces mediante flechas, y tienen en cuenta la orientación de esta (*Figura 1.2.1*), mientras que los grafos no dirigidos, representan los enlaces mediante líneas, siendo $(v_i,v_j)=(v_j,v_i)$ (*Figura 1.2.2*).

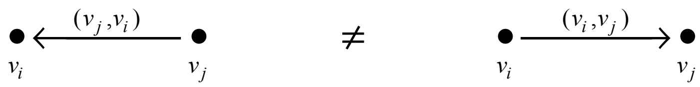


Figura 1.2.1. Grafos dirigidos

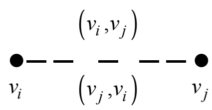


Figura 1.2.2. Grafo no dirigido

Para una red que contenga pocos vértices, se puede encontrar una solución probando todas las rutas posibles, (método de la fuerza bruta), pero esto no resulta práctico ni computacionalmente viable: en los casos reales el número de rutas es demasiado grande para permitir analizarlas todas. Su resolución se puede llevar a cabo mediante algoritmos o bien resolviendo un problema de programación lineal.

1.3 Trascendencia del Problema

El Problema de Camino Mínimo es uno de los problemas fundamentales en el estudio de la Optimización en Redes. Aparece frecuentemente en la práctica en una amplia variedad de aplicaciones, como por ejemplo en empresas de transporte y telecomunicaciones, en la administración de proyectos, determinación de rutas, problemas de localización, sustitución de equipos, etc., o como subproblemas dentro de otros problemas de optimización en redes.

Los Problemas de Camino Mínimo son fáciles de resolver con eficiencia, y siendo uno de los modelos de red más simples, sirven como base para modelos mucho más complejos. De hecho, el estudio del Problema de Camino Mínimo es un punto de partida para el estudio de la Teoría de Grafos, ya que permite introducir muchas ideas clave sobre el flujo en redes.

1.4 Definición formal del Problema

Sea un grafo $G=(V,U)$ tal que cada arco (i, j) tiene asignado un valor numérico d_{ij} que denominamos longitud o peso. La longitud L_{v_I,v_F} de un camino P_{v_I,v_F} desde el vértice inicial v_1 hasta el vértice final v_F, es la suma de las longitudes de todos los arcos que lo componen. El

Problema de Camino Mínimo consiste en determinar el camino de menor longitud, es decir, se busca minimizar la suma de los tramos que conducen de un punto a otro. Esta distancia se llama peso mínimo, L^*, y el itinerario P_{ij}^* que satisface L^* se denomina camino mínimo.

1.5 Soluciones

Su resolución se puede llevar a cabo mediante algoritmos adecuados o bien resolviendo un problema de programación matemática. El Problema de Camino Mínimo tiene una amplia gama de soluciones. Vamos a comentar algunas de ellas que serán necesarias para este trabajo, y otras que, aunque no se apliquen, dejan abierto un amplio campo de posibles variaciones que pueden ser interesantes en el futuro.

Comenzamos comentando la obtención de una solución mediante programación matemática (de la Fuente, 1997:503). La construcción del modelo se explica detalladamente en el punto *2.1.2*, por lo que haremos un breve resumen.

El problema consiste en determinar el camino más corto entre dos puntos de una determinada red. El coste de utilizar un camino es la suma de los costes de cada uno de los arcos que se atraviesan. Si se desea plantear este problema de forma que se minimice el coste, la función objetivo será minimizar la suma de los costes de los arcos que se atraviesan, y como restricciones tendremos las denominadas restricciones de flujo. Estas son: partimos del primer nodo (es decir, del primer nodo sólo salimos, no llegamos a él), terminaremos en el último (es decir, llegaremos al último nodo, pero no saldremos de él), y en todos los demás sólo podremos salir de un nodo si hemos llegado inmediatamente antes a él, y deberemos salir de cada nodo inmediatamente después de llegar. La formulación del problema se describe mediante las siguientes ecuaciones:

$$\text{Función objetivo:} \quad \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{Sujeto a:} \quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{k=1}^{m} x_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } 2 \leq i \leq m-1 \\ -1 & \text{si } i = m \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, m$$

Este problema es un problema de programación entera mixta. Las condiciones $x_{ij} = 1$ ó 0 indican si el arco x_{ij} está o no en el camino más corto.

La matriz de restricciones de este problema tiene la propiedad de ser totalmente unimodular (todas sus submatrices cuadradas tienen determinante igual a 0, +1 ó -1). Esta propiedad asegura que si existe una solución óptima, ésta es entera con valores de las variables x_{ij} = 0 ó 1. Por tanto, el problema que se ha de resolver es:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{k=1}^{m} x_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } 2 \le i \le m-1 \\ -1 & \text{si } i = m \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad i, j = 1, 2, \ldots, m$$

Pudiéndose resolver como un problema de programación lineal.

También se puede resolver este problema mediante distintos algoritmos de programación dinámica que se pueden clasificar en dos grandes familias, ambas de tipo iterativo. Estas se denominan *Label Setting* y *Label Correcting*, y se diferencian principalmente en el uso del etiquetado dentro del algoritmo y en la convergencia que tienen hacia la solución (Pardalos, 2000:190).

1. *Label Setting*

El algoritmo más conocido de este conjunto es el algoritmo de Dijkstra, descrito por primera vez por Edsger Dijkstra en 1959, y cuyas variantes más eficientes son el algoritmo S-HEAP, o el S-DIAL (Pardalos, 2000:192). Estos algoritmos designan una etiqueta permanente u óptima en cada iteración, y se emplean para resolver problemas acíclicos y con pesos no negativos. Dentro de este conjunto, en este trabajo sólo se ha empleado el algoritmo de Dijkstra, que después comentaremos con detalle.

2. *Label Correcting*

Este conjunto de soluciones contiene algoritmos como el método de Bellman-Ford, o el algoritmo Floyd-Wharsall. Estos algoritmos consideran todas las etiquetas como temporales hasta el paso final. Son más generales y resuelven todo tipo de problemas. Requieren cálculos menos sofisticados que los algoritmos *Label Setting*, pero como contrapartida pueden requerir estudiar un mismo nodo más de una vez (Pardalos, 2000:194).

Ajeno a esta clasificación, hay otro gran conjunto de soluciones algo menos conocidas que los algoritmos anteriores: el conjunto de soluciones heurísticas y meta-heurísticas. El Problema de Camino Mínimo está muy estudiado en su versión determinista, pero no tanto en la estocástica. Los avances en la optimización estocástica han motivado una revisión de los problemas clásicos (Alonso-Ayuso, 2008). Muchas de estas investigaciones sobre el Problema del Camino Mínimo Estocástico han dado lugar a variaciones dinámicas del problema. Algunos ejemplos de algoritmos que se han desarrollado en este campo son el algoritmo heurístico eficiente de Fu & Rilett (1998), el algoritmo NP óptimo de Hall (1986) y el de Miller-Hooks & Mahmassani (1999). Algunos métodos meta-heurísticos que conviene comentar son algoritmos propios de la Inteligencia Artificial, que pueden ser adaptados para la resolución del Problema del Camino Mínimo Estocástico. Estos algoritmos son los algoritmos evolutivos o algoritmos genéticos, los sistemas multi-agente (colonias de hormigas) y diferentes tipos de búsquedas.

La principal diferencia entre estos métodos radica en que los métodos clásicos garantizan el óptimo numérico, permiten un elevado número de restricciones y hacen búsquedas locales, mientras que los métodos meta-heurísticos no garantizan la obtención del óptimo, no permiten elevado número de restricciones, tienen mecanismos específicos para evitar óptimos locales, y exploran una gran cantidad de soluciones en poco tiempo.

En este capítulo se han dado las pautas teóricas que se siguen en el resto del trabajo. En el capítulo 2 se lleva a cabo la modelización matemática del problema para la obtención de rutas a pie, y se hace un estudio de los criterios de seguridad, el cual se complementa con un estudio de la construcción de rutas en función de varios criterios de seguridad, denominado camino seguro multicriterio. El capítulo 3 se centra en la construcción de rutas óptimas con distintos medios de transporte, en concreto en coche y en transporte público. Y finalmente, en el capítulo 4 se exponen las conclusiones y los proyectos futuros.

2.- Camino seguro "a pie"

En este capítulo se desarrolla el estudio del camino a pie. Queremos obtener un mapa que recoja los caminos más seguros hacia el colegio. Esto hace plantearse una cuestión fundamental: ¿Qué es un camino seguro? Por un lado, es obvio que la seguridad en una calle está estrechamente relacionada con la confianza que una persona tiene para transitar por esa calle o preferir evitarla en la medida de lo posible. Esta confianza es lo que denominamos "perspectiva de la seguridad" que una persona tiene sobre una calle, por lo que este será uno de los criterios que vamos a evaluar. Por otra parte, una persona se puede considerar más segura en una calle por la cual transita más gente conocida. En este sentido, para los alumnos serán más seguras las calles por la que más compañeros suyos vayan al colegio. En el presente trabajo no se profundizará en este aspecto, al haber sido ya realizado dicho estudio por la Comunidad de Madrid. Por último, alguien podría preferir estar el mínimo tiempo posible en la calle y por tanto, lo que busca es la ruta más rápida posible.

En este tipo de decisiones siempre se pueden incorporar más criterios *a posteriori*, empleando los mismos algoritmos con los datos correspondientes. La posibilidad de combinar más de un criterio para buscar la ruta personalizada más adecuada se puede ver en el punto *2.4* Camino seguro "multicriterio".

En la siguiente sección se muestra el estudio del problema tomando como criterio la "perspectiva de la seguridad", se explica la recogida de datos y se desarrollan los algoritmos con MATLAB. Puesto que el fondo teórico es el mismo para cualquiera de los criterios, estos algoritmos son aplicables también a los demás casos.

2.1 Camino seguro a pie: perspectiva de la seguridad

El objetivo final del problema es encontrar los caminos más seguros en el entorno del colegio. Construimos un grafo tomando como vértices las intersecciones entre calles, y como aristas los tramos de calles entre dichas intersecciones. Si damos como peso a las aristas la valoración de la seguridad en una escala 0-1, el problema consiste en encontrar los caminos que maximicen esta seguridad, o lo que es lo mismo, que minimicen el riesgo del camino considerando el riesgo, si la seguridad viene dada por s, como $r = 1 - s$.

El criterio de seguridad que tomamos para dar pesos a las aristas en la modelización del grafo es la perspectiva de la seguridad que tienen alumnos y padres de alumnos de la zona en la que está ubicado el colegio, en este caso el colegio *'Nuestra Señora de la Paloma'* de Madrid.

2.1.1 Recogida y tratamiento de datos

Para poder cuantificar esta perspectiva de la seguridad, se realizó una encuesta a los alumnos de 5º y 6º de primaria y a sus padres (81 sujetos en total). Esta encuesta consistió en la entrega de un mapa del entorno del colegio en el cual se pedía asignar mediante colores una valoración de seguridad a las calles que conociesen, diferenciando la seguridad en tres categorías distintas: verde para las calles muy seguras, azul para las calles de seguridad intermedia, y rojo para las calles inseguras. El modelo de la encuesta y una de las encuestas recogidas se pueden ver en el anexo A.

Una vez recopiladas las encuestas, se introdujeron en un fichero Excel, distinguiendo por cada calle: sujeto, valoración asignada, alumno o padre, y curso (si procede).

Para obtener la ponderación del valor de cada calle, tenemos en cuenta el número de sujetos que la valoran como muy segura, el número de sujetos que la consideran de seguridad intermedia, y el número de sujetos que la consideran insegura, así como la cantidad de sujetos que no la han valorado, generando incertidumbre. Además hay que tener presente el hecho de que la medición de las variables cualitativas está hecha mediante la asignación de etiquetas lingüísticas, las cuales también llevan un grado de incertidumbre intrínseco. Se explica a continuación la técnica empleada para hacer la ponderación y tratar la incertidumbre:

Disponemos de cuatro mediciones para cada calle: el número de sujetos que la valoran en rojo, el número de sujetos que lo hacen en azul, el número de los que lo hacen en verde, y el número de sujetos que no asignan ningún valor. Partiendo de estas cuatro mediciones, queremos obtener una valoración única, teniendo en cuenta que no es lo mismo, por ejemplo, que una calle esté valorada por 5 personas como 'poco segura', y el resto no contestado, que otra calle valorada por todos como 'poco segura'. Lo que estamos buscando en realidad es la ubicación de esa valoración en un rango entre seguro e inseguro en función de los cuatro valores de los que partimos. Esto se corresponde con buscar la ubicación de un punto dentro de un tetraedro regular cuyos vértices son las cuatro posibles valoraciones, teniendo en cuenta los pesos que se asigna a cada vértice y proyectarlo sobre la base formada por los vértices correspondientes a ‘verde’, ‘azul’, y ‘rojo’, donde ya estaremos en situación de hacer una ponderación final que refleje la seguridad de esa calle en relación a la proximidad o lejanía que presente con los vértices de la base.

Así, para modelizarlo matemáticamente, por cada calle construimos un tetraedro con vértices (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), que representan las tres valoraciones posibles de la seguridad (verde, azul y rojo) respectivamente, y (1, 1, 1), que representa el número de encuestados que no han asignado valoración, y consideramos el punto “respuestas” dado por las coordenadas (*V*, *A*, *R*, *NC*), siendo *V* el número de encuestados que valoraron esta calle en verde, *A* el número de encuestados que lo hicieron en azul, *R* el número de los que lo hicieron en rojo y *NC* el número de no contestados. Para poder hacer una valoración ponderada, debemos representar dicho punto dentro del tetraedro, proyectarlo sobre la base y, una vez proyectado, hacer la ponderación.

Para representar el punto dentro del tetraedro, se ha considerado la siguiente teoría:

Sea un tetraedro dado por los puntos:

$$A=(x_A,y_A,z_A),\ \mathrm{B}=(x_B,y_B,z_B),\ \mathrm{C}=(x_C,y_C,z_C),\ \mathrm{D}=(x_D,y_D,z_D).$$

Un punto $P=(x,y,z)$ del tetraedro se puede expresar como:

$$P=(t_A,t_B,t_C,t_D) \text{ con } t_A+t_B+t_C+t_D=1 \text{ y } 0\le t_i\le 1\ \forall i=A,B,C,D.$$

La relación entre las coordenadas cartesianas y las baricéntricas del tetraedro (la cual vamos a aplicar) es:

$$\begin{cases} x=t_Ax_A+t_Bx_B+t_Cx_C+t_Dx_D \\ y=t_Ay_A+t_By_B+t_Cy_C+t_Dy_D \\ z=t_Az_A+t_Bz_B+t_Cz_C+t_Dz_D \end{cases}$$

Quedando las coordenadas del punto “respuesta”:

$$\begin{cases} x=v\cdot 1+a\cdot 0+r\cdot 0+nc\cdot 1\ =v+nc \\ y=v\cdot 0+a\cdot 1+r\cdot 0+nc\cdot 1\ =a+nc \\ z=v\cdot 0+a\cdot 0+r\cdot 1+nc\cdot 1\ =r+nc \end{cases}$$

Siendo $v=V/81$; $\mathrm{a}=A/81$; $\mathrm{r}=R/81$; $\mathrm{nc}=NC/81$, para que se verifique la condición necesaria $v+a+r+nc=1$.

Una vez obtenidas las coordenadas cartesianas del punto “respuesta”, lo proyectamos sobre la base formada por los vértices que representan las tres valoraciones. Para ello calculamos la recta perpendicular a la base que pasa por el punto respuesta y la intersección entre dicha recta y la base, obteniendo el punto proyectado $P=(x',y',z')$.

Los cálculos quedarían modelados del siguiente modo:

Tenemos que proyectar el punto (x,y,z) sobre el plano dado por los puntos $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$. La ecuación implícita de este plano es $x+y+z-1=0$, y un vector normal a él es $(1,1,1)$.

La recta que une el punto proyectado que buscamos con el original viene dada por la expresión

$$\begin{cases} x-x'=y-y' \\ x-x'=z-z' \end{cases}$$

El punto buscado será la intersección entre el plano y esta recta, por tanto, lo calculamos resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x-x'=y-y' \\ x-x'=z-z' \\ x'+y'+z'-1=0 \end{cases}$$

Finalmente, hemos obtenido el punto proyectado $P=\left(x',y',z'\right)$, donde

$$\begin{cases} x'=\dfrac{2x-y-z+1}{3} \\ y'=x'-x+y \\ z'=x'-x+z \end{cases}$$

Una vez proyectado consideramos la valoración final $n_F=0\cdot p_R+0.5\cdot p_A+1\cdot p_V$ con $p_j=\dfrac{\left(1/d_j\right)}{\left(1/d_V+1/d_A+1/d_R\right)}$ $\forall j=V,A,R$; donde p_j representa la distancia del punto proyectado al vértice de la base correspondiente al color verde, azul, o rojo, respectivamente.

De este modo, n_F es la valoración final de seguridad que asignamos a cada calle, y $1-n_F$ el peso que asignamos a cada arista.

2.1.2 Modelización del problema

Una vez construido el grafo y valoradas las aristas con el peso "riesgo", nuestro problema pasa a ser un Problema de Camino Mínimo con ciclos y pesos positivos. Tenemos varias alternativas para resolverlo. En primer lugar, veamos la formulación del modelo de Camino Mínimo como un problema de programación lineal.

Tenemos una red dada de vértices y aristas $G=(V,U)$, que son las intersecciones entre calles u los tramos que unen dichas intersecciones. Esta red tiene una ponderación de pesos d_{ij} para cada arco $(i,j)\in U$, que son los valores de seguridad de cada calle. El problema consiste en determinar el camino de longitud mínima entre los vértices inicial (1) y final (n). Consideraremos como vértice inicial la entrada al colegio, y como vértice final el punto de inicio de la ruta de cada niño (generalmente, su casa).

Se definen las variables $x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si se recorre el arco (i,j)}\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases} \qquad \forall (i,j)\in U$

Así, el problema consiste en minimizar el peso total del camino que lleva desde el vértice inicial hasta el vértice final, siendo este peso la suma de los pesos de los arcos que se recorren a lo largo de todo el camino. Esto puede formularse del siguiente modo:

$$\min \quad d=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij}$$

Para modelizar correctamente el problema y obtener soluciones coherentes, hay ciertas condiciones que debemos hacer cumplir a nuestro modelo. En primer lugar, desde nuestro punto de partida salimos por una única calle (o tramo de calle), por lo que hay que restringir el modelo de forma que tome una sola arista con un extremo en el vértice inicial. Esto se puede formular haciendo que la suma de todas las aristas que se recorren en el camino y que tienen como extremo al vértice inicial sea exactamente 1:

$$\sum_{k=2}^{n} x_{1k}=1$$

Igualmente, al punto final debemos llegar por un único tramo, por tanto, la suma de todas las aristas que se recorren en el camino y que tienen como extremo al vértice final, es exactamente 1:

$$\sum_{k=1}^{n-1} x_{kn}=1$$

Finalmente, el número de aristas que llegan a un vértice intermedio debe ser igual al número de las que parten de él, ya que no podemos partir de un vértice si antes no hemos llegado a él. Expresado de una forma más intuitiva, no podemos pasar por una calle hasta después de atravesar otra que desemboque en ella. Esto da lugar a n-2 restricciones, dadas por la expresión:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ki} \quad , \quad \forall i \in \{2,\ldots,n-1\}$$

Dado que las variables únicamente toman los valores 0 ó 1, tenemos un problema de programación entera 0-1.

El modelo queda:

$$\min \quad d = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij}$$

sujeto a:

$$(1) \quad \sum_{k=2}^{n} x_{1k} = 1$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{n-1} x_{kn} = 1$$

$$(3) \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ki} \quad , \quad \forall i \in \{2,\ldots,n-1\}$$

con

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se toma el arco (i,j)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Podemos observar que en este modelo no se ha añadido una restricción de eliminación de ciclos. Esto es debido a que al ser un problema de minimizar y las distancias todas positivas, el propio modelo elimina la posibilidad de que se forme un ciclo.

A pesar de que resolviendo este problema de programación lineal ya estaría resuelto nuestro Problema de Camino Mínimo, es interesante ver los algoritmos que hay explícitos para este tipo de problema. Por ser un grafo no dirigido, con ciclos y pesos positivos, es evidente que el algoritmo que mejor se adapta a la resolución de este problema es el algoritmo de Dijkstra.

También puede resultar interesante obtener una araña de movilidad mediante el árbol soporte de mínimo peso, el cual conectaría mediante caminos todos los vértices de la red entre sí (por tanto conectaría el colegio con todos los posibles destinos del mapa) sin ciclos y con el mínimo peso total. Si bien con este algoritmo no se obtienen los caminos de mínimo peso desde el colegio a cada punto, se obtiene una red con peso global mínimo, y mediante un estudio de los niveles de riesgo de esa red, se puede obtener una visión clara de los círculos de influencia del colegio.

2.1.3 Algoritmo de Dijkstra

El algoritmo de Dijkstra (1959-2002) calcula el camino más corto desde un vértice inicial hasta todos los demás vértices de un grafo en función de unas 'distancias' o 'pesos', asignados a cada arista (Alonso, 2008). La idea en este algoritmo, considerado de tipo *greedy*, es explorar todos los caminos más cortos que parten del vértice origen y llevan a los demás vértices. Cuando se obtiene el camino más corto desde el vértice origen al resto de vértices el algoritmo se detiene.

A continuación se detalla el pseudocódigo del algoritmo. Se adjunta el enlace al código del programa e imágenes de la ejecución del mismo en el anexo B.

Pseudocódigo del Algoritmo de Dijkstra:

Teniendo un grafo no dirigido ponderado de n nodos no asilados, sea el vértice 1 el nodo inicial. Definimos la siguiente notación de etiquetado:

Sea P el conjunto de vértices etiquetados de forma permanente.

Sea T el conjunto de vértices etiquetados de forma temporal.

PASO 0: INICIALIZACIÓN

La distancia del v. inicial a sí mismo es 0

$$u_1 = 0$$

La distancia del v. inicial a los demás viene dada por las distancias originales.

$$u_j = d_{1j} \quad \forall j = 2,...,n$$

El vértice 1 tiene una etiqueta de distancia definitiva y el resto temporal. El predecesor de todos los vértices, por el momento, es 1.

$$P = \{1\}$$

$$T = V - \{1\}$$

$$p(j) = 1 \quad \forall j$$

PASO 1: HACER UNA ETIQUETA PERMANENTE

Buscar $k \in T$ tal que $u_k = \min_{j \in T} \{u_j\}$

Hacer $P = P \cup \{k\}$

$T = T - \{k\}$

Si $T = \emptyset$ → FIN

PASO 2: REVISAR ETIQUETAS TEMPORALES (Actualizar)

$\forall j \in T$ calcular $u_j = \min\{u_j, u_k + d_{kj}\}$

Si el mínimo se alcanza en $(u_k + d_{kj})$, hacer $p(j) = k$.

Ir al paso 1.

Este algoritmo tiene una complejidad $O(n^2)$, siendo n el número de nodos.

Al aplicar este programa a nuestro grafo, obtenemos la araña de movilidad *Imagen 2.1.3.*

Imagen 2.1.3. Araña con criterio 'Perspectiva de la seguridad'

Este algoritmo es ideal para calcular la ruta óptima de un alumno al colegio, o bien para que el colegio consiga una araña de movilidad para una selección de puntos de destino concreta.

2.1.4 Algoritmo de Kruskal

Si lo que queremos es obtener un mapa de movilidad completo de la zona, en realidad lo que estamos buscando es el árbol soporte de mínimo peso del grafo. El Problema del Árbol Soporte de Mínimo Peso se plantea en grafos no dirigidos, que es nuestra situación actual, y se enuncia como sigue:

Dada una red conexa $G=\left(V,E,p(e)\right)$, entendiendo como red un grafo con aristas valoradas, se trata de encontrar el árbol soporte $H=\left(V,T\right)$ con $T\subset E$ tal que se minimice el peso total $p(T)=\sum_{e\in T}p(e)$.

Este problema se puede resolver eficientemente con el algoritmo de Kruskal (Alonso, 2008:35), que partiendo de $T=\varnothing$, construye el árbol soporte añadiendo aristas que no formen ciclos. Si el grafo de partida es conexo y añadimos las aristas en orden creciente de peso, cuando T tenga $n-1$ aristas se habrá completado el árbol soporte.

Se detalla a continuación el pseudocódigo del algoritmo. Se adjunta el enlace al código del programa e imágenes de la ejecución del mismo en el anexo C.

Pseudocódigo: Sea G un grafo no dirigido ponderado de n nodos no asilados.

Etiquetado: Sea T el conjunto de aristas seleccionadas para formar parte del árbol.

Sea C el conjunto que indica a que clase pertenece cada arista.

PASO 0: INICIALIZACIÓN

Comenzamos sin haber seleccionado ninguna arista, $T=\varnothing$

Como cada vértice está aislado, (no hay aristas), cada vértice pertenece a una clase: $C=\left\{1,2,...,n\right\}$, siendo m el número de aristas del grafo.

PASO 1: AÑADIR UNA ARISTA AL ÁRBOL

Buscar $u_k\in U$ tal que $\mathrm{p}(u_k)=\min_{u_j\in U\setminus T}\left\{p(u_j)\right\}$

Si los dos vértices de esa arista pertenecen a la misma clase:

Descartarla. Ir a PASO1

En otro caso: Ir a PASO 2

PASO 2: REVISAR ETIQUETAS TEMPORALES (Actualizar)

Unir todas las aristas pertenecientes a las dos clases de los vértices de la arista seleccionada en una sola clase.

Añadir la arista al árbol.

Si cardinal de T es menor que n-1, $|T| < n-1$, ir a PASO 1.

En otro caso: FIN

Este problema también se puede modelizar y resolver como problema de programación matemática. La mayor diferencia que tiene respecto al modelo del problema de camino mínimo es que este modelo sí requiere de restricciones de eliminación de ciclos. El modelo de programación matemática del Problema del Árbol Soporte de Mínimo Peso quedaría:

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{e\in E} d_e x_e \\
&s.a. \\
&\qquad \sum_{e\in E} x_e = n-1 \\
&\qquad \sum_{\substack{e=\{x,y\} \text{ tal} \\ \text{que } x,y\in S}} x_e \leq |S|-1 \qquad \forall S \subset V,\ \ S \neq \emptyset \\
&\qquad x_e \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

Al aplicar el algoritmo de Kruskal, y haciendo una pequeña modificación en la representación gráfica de MATLAB para poder ver en colores el valor simbólico de seguridad, (rojo = inseguro, azul = seguridad media, verde = muy seguro), obtenemos el mapa de movilidad adjunto *Imagen 2.1.4*. Analizando este mapa, podemos ver el círculo de influencia del colegio. Esto es, en el entorno del colegio la perspectiva de seguridad que reflejan las encuestas dice que es una zona segura. Esta zona pasa gradualmente a ser una zona de seguridad media en un círculo algo más amplio, y pasa a ser zona insegura gradualmente según se aleja del colegio. Esto es debido a que el entorno del colegio es una zona "conocida" para la gran mayoría de los alumnos. Al igual que si se realizase a cada alumno una encuesta acerca de la seguridad en el entorno de su casa, ésta aparecería en verde, mientras que si se les preguntase por zonas más alejadas o por las que han transitado poco, es decir, zonas "desconocidas", éstas vendrían dadas en rojo.

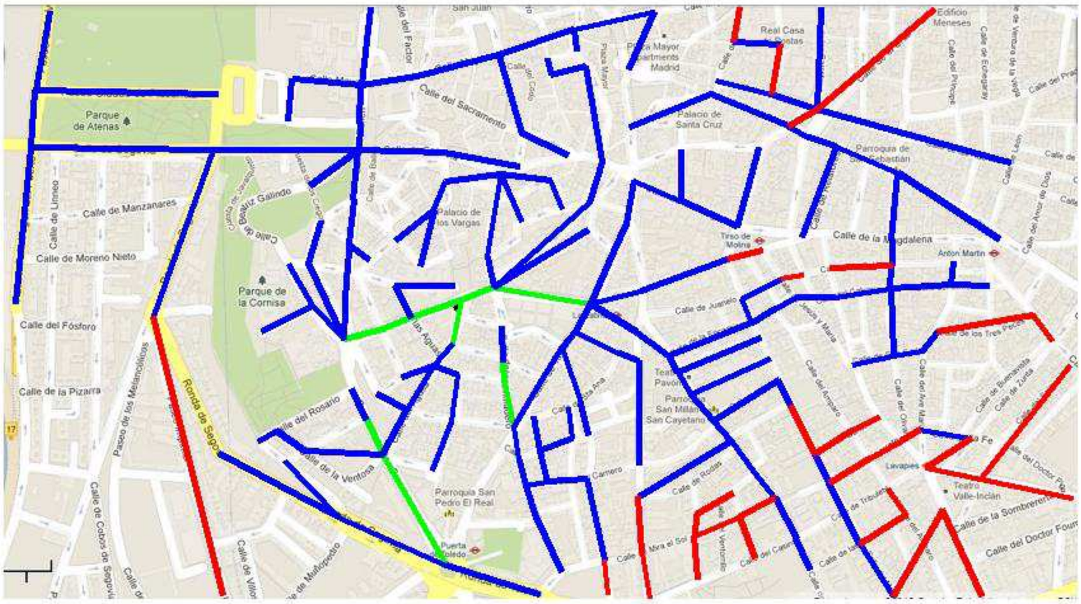


Imagen 2.1.4. Mapa con criterio 'Perspectiva de la seguridad'

2.2 Camino seguro a pie: ir acompañado

Como ya se comentó en el inicio de esta sección, hay niños que se sienten más seguros si van acompañados por alguien conocido. Como se trata de fomentar su independencia, supondremos que no van acompañados por ningún adulto supervisor. Les queda, por tanto, la compañía de otros compañeros del colegio.

Considerando así que el camino más seguro es por aquel que más alumnos del colegio transitan, se debería hacer una recogida de datos indicando por donde suele ir cada niño al colegio. Si se hace una suma directa de los alumnos que marcan cada calle, la valoración de todas las calles será positiva y entera, con valores entre 0 y el número de sujetos que realicen la encuesta.

De acuerdo a estas consideraciones, la ruta preferible será la que más peso tenga. Esto altera nuestro planteamiento inicial ya que ahora lo que se busca es maximizar resultados. Dentro de las muchas opciones que hay para resolver este problema, lo más práctico es modificar los datos sin alterar su significado de forma que el problema pase a ser de minimización y podamos emplear los mismos algoritmos que en el apartado anterior.

Las posibles modificaciones son muchas, pero la valoración más cómoda de las calles según este criterio es la siguiente:

1. Sumar las veces que aparece cada calle en las encuestas.
2. Multiplicar todos los resultados por -1, dejando todos los pesos en negativo.
3. Sumar una cota lo suficientemente alta para trasladar los pesos a un rango positivo. Esta cota puede ser, por ejemplo, el número total de sujetos encuestados.

Así, la valoración para una calle quedaría:

$$\boxed{\text{valor} = \text{n}^{\text{o}} \text{ total de sujetos encuestados} - \text{n}^{\text{o}} \text{ de veces que aparece en las encuestas}}$$

Una vez hecha esta valoración, son aplicables a ella los algoritmos desarrollados en el apartado anterior. Empleando los datos recogidos por el Ayuntamiento de Madrid, se obtienen la araña de movilidad *Imagen 2.2.1* y el mapa de movilidad *Imagen 2.2.2.*

Imagen 2.2.1. Araña con criterio 'Ir acompañado'

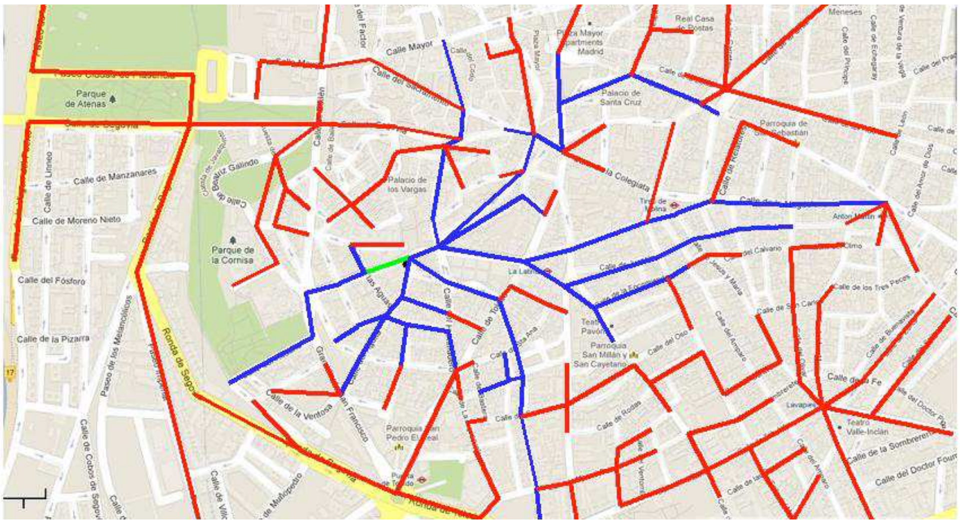


Imagen 2.2.2. Mapa con criterio 'Ir acompañado'

2.3 Camino seguro a pie: la ruta más rápida

En otras ocasiones, puede ser interesante conocer las rutas más rápidas que llevan al colegio. Para ello, se han tomado los tiempos aproximados que se tarda en recorrer cada calle a pie, empleando la aplicación que facilita para este fin *Google Maps*. Una vez tomadas estas medidas, el problema vuelve a ser el mismo. El grafo no cambia, se tienen medidas positivas para cada arista, y se busca encontrar las rutas de mínima distancia. Aplicando los algoritmos desarrollados en el apartado anterior, se obtienen la araña de movilidad *Imagen 2.3.1* y el mapa de movilidad *Imagen 2.3.2*.

Imagen 2.3.1. Araña con criterio 'Tiempo'

Imagen 2.3.2. Mapa con criterio 'Tiempo'

2.4 Camino seguro "multicriterio"

Hasta ahora hemos hecho un estudio detallado del problema en función de varios criterios de seguridad. En concreto, hemos empleado la perspectiva de la seguridad, el ir acompañados y el que la ruta sea lo más rápida posible. Pero estos tres criterios no son incompatibles y se podría querer combinarlos. En el caso de que el camino óptimo sea el mismo para los tres criterios la solución es obvia, pero esto se dará en muy pocas ocasiones. El problema está en todas aquellas situaciones en las que en función del criterio escogido se obtienen soluciones muy distintas. Para poder resolver esta situación recurrimos a la programación multiobjetivo.

El análisis de problemas de decisión con criterios múltiples se ha convertido en una de las áreas de desarrollo más activas en los últimos años en el campo de la investigación operativa. Algunos de los investigadores más conocidos que han centrado su atención en la misma son Pareto, Edgeworth y Osyczka. Este último define la optimización multiobjetivo como la búsqueda de un vector de variables de decisión que satisfaga un cierto conjunto de restricciones y optimice un vector de funciones objetivo. Estas funciones forman una descripción matemática de los diversos criterios de rendimiento, los cuales suelen estar en conflicto unos con otros (Díaz-Madroñero, 2010). El término optimizar en este caso toma pues un significado diferente al del caso de problemas mono-objetivo. En esta sección consideraremos optimizar como encontrar aquella solución que obtiene valores aceptables para el decisor de todas las funciones objetivo.

Supongamos que estamos en un contexto decisional definido por una serie de objetivos a optimizar y un conjunto de restricciones que se deben cumplir. La optimización simultánea de todos los objetivos es, por lo general, imposible, ya que normalmente entre los objetivos que se pretenden optimizar existe cierto grado de conflicto. El enfoque multiobjetivo que nos da la programación multicriterio pretende establecer el conjunto de soluciones eficientes en sentido *paretiano* o conjunto de óptimos de Pareto. Una solución es un óptimo de Pareto cuando está formado por soluciones factibles tales que no existe otra solución factible que proporcione una mejora en un atributo sin producir un empeoramiento en al menos otro de los atributos. Estas soluciones no suelen ser únicas, sino un conjunto de soluciones, a las cuales se denomina Frontera de Pareto. Sin embargo, en la mayoría de las situaciones, el fin último es dar una única solución, no un conjunto de posibles soluciones. Se denomina solución de mejor compromiso a la solución del conjunto eficiente que es seleccionada por el decisor.

Dentro de los muchos métodos que se han desarrollado para la resolución de problemas de decisión multicriterio, hemos seleccionado el método de las ponderaciones para resolver nuestro problema. Se obtendrá una solución del conjunto eficiente de acuerdo con las preferencias que tenga el usuario en cuestión con respecto a los criterios considerados.

2.4.1 Método de las ponderaciones

El método de las ponderaciones consiste en optimizar la suma de los distintos objetivos ponderados mediante pesos no negativos, sujetos a las restricciones del problema. En 1963, Zadeh demostró que para cada conjunto de pesos no negativos que se seleccionen para la aplicación de este método se obtiene un punto extremo eficiente (Romero, 1993:40).

En nuestro caso, la modelización del problema quedará del siguiente modo:

$$\text{minimizar } \; w_1 \cdot persp\_seguridad + w_2 \cdot acompañado + w_3 \cdot tiempo$$

$$\text{sujeto a: } \quad \sum_{j=2}^{n} x_{1j} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - \sum_{k=1}^{n} x_{ki} = 0 \quad \forall i = 2,...,n-1$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} x_{kn} = 1$$

$$persp\_seguridad = \sum_{i,j}^{n} ps_{ij} x_{ij}$$

$$acompañado = \sum_{i,j}^{n} a_{ij} x_{ij}$$

$$tiempo = \sum_{i,j}^{n} t_{ij} x_{ij}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i, j = 1,...,n$$

$$w_p \geq 0 \qquad \forall p = 1,2,3$$

Siendo ps_{ij} el valor de la perspectiva de seguridad de la calle (*i,j*), (apartado 2.1), a_{ij} el valor de peligrosidad asignado a la calle (*i,j*) según el criterio de ir acompañado, (apartado 2.2), y t_{ij} los valores de tiempo que se emplearon para la obtención de la ruta más rápida (apartado 2.3). Es conveniente normalizar los valores ps_{ij}, a_{ij}, y t_{ij}, para evitar que influya la diferencia de unidades de los criterios.

Se adjunta el enlace al código del programa e imágenes de la ejecución del mismo en el anexo D. Este programa es un programa interactivo en el cual el padre podrá dar su propia ponderación a los criterios.

3.- Camino seguro “en medios de trasporte alternativos”

Una vez hecha la modelización a pie podemos pasar a la segunda fase del trabajo, que es la obtención de rutas seguras en otros medios de transporte. Aquí se ha hecho una distinción de los medios de transporte en función de las características que presentan a la hora de la modelización. Separamos dos categorías: transporte privado (coche), y transporte público (metro y autobús), siendo la principal diferencia entre ambas el poder modificar la ruta según la propia conveniencia, dentro de las restricciones viales, o el tener que ajustar el trayecto a unas líneas de transporte con sus puntos de acceso prefijados. En el capítulo 4 se comentará la posibilidad de ampliación de este estudio con la modelización de rutas seguras en bicicleta, vehículo que iría comprendido dentro de la primera categoría.

3.1 Camino seguro “en coche”

Aunque el grafo subyacente es el mismo, este problema es muy distinto al planteado en el capítulo anterior. La principal diferencia es que en este problema el grafo pasa a ser un grafo dirigido. Esto se debe a que, a diferencia del caso anterior en el que andando se podía recorrer una calle en un sentido u otro indistintamente, en el caso del coche sólo se podrá recorrer una calle en el sentido en el que la orientación del tráfico lo permita. En algunos casos será de doble sentido y tendremos un arco para cada uno de ellos, y en muchos casos serán calles de un único sentido. Hasta aquí podría resolverse fácilmente mediante el uso de algoritmos, pero tenemos una restricción más que explicamos a continuación.

Tal y como está modelada la red, los vértices son las intersecciones, es decir, los cruces entre calles, y éstos vértices estarán unidos mediante arcos (i,j) en caso de que se pueda ir del vértice i, al vértice j. Visualmente, esto dice que podemos ir de la intersección i a la j por el arco (i,j) si la calle (i,j) tiene un carril de circulación en ese sentido, y desde dicho cruce j tomaremos algunas de los arcos (j,k) disponibles. Esto no es estrictamente posible, ya que hay muchas vías en las cuales al llegar a un cruce encontraremos un prohibido girar hacia la derecha/izquierda. Veámoslo más claramente con un ejemplo:

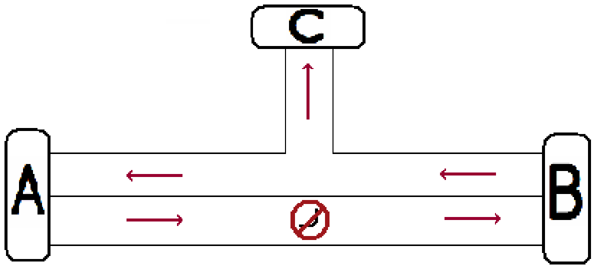


Figura 3.1. Ejemplo de cruce

El cruce anterior *(Figura 3.1)* según la modelación empleada hasta el momento, vendría dado por el grafo siguiente *(Figura 3.2)*:

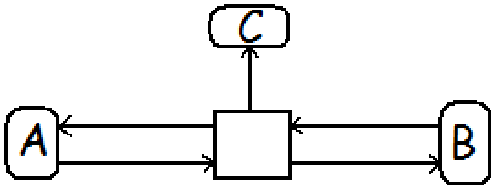


Figura 3.2. Modelización errónea del cruce

Este gráfico nos indica claramente que podemos ir del punto A hasta el cruce, y del cruce al punto A, y lo mismo ocurre con el punto B, y que sólo podemos ir por la calle que une C con el cruce en el sentido cruce-C. Lo que no nos refleja este grafo de ningún modo es esa prohibición que tenemos de girar a la izquierda cuando vamos por el carril A-cruce. Es decir, nos permitiría ir desde A hasta el cruce y una vez allí girar hacia C, cuando esto en realidad no se puede hacer.

Esta carencia del modelo se puede subsanar de varios modos: por un lado se podrían hacer modificaciones en el modelo. Por ejemplo se podrían duplicar todos los vértices, lo que, a pesar de ser efectivo, no es nada eficiente. La modelización del cruce quedaría arreglada, como se puede ver en la figura *(Figura 3.3)*.

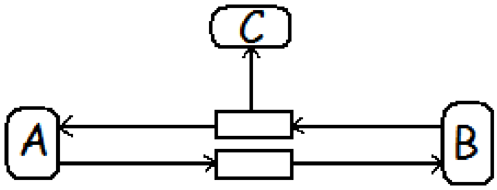


Figura 3.3. Modelización correcta del cruce

Pero al duplicar todos los nodos, o incluso triplicar o cuadruplicar, complicamos enormemente la construcción de la matriz de adyacencia del grafo. Por tanto, descartamos esta opción.

Otra opción es atacar el problema de un modo que hasta ahora hemos comentado pero no hemos aplicado: mediante programación matemática. Tenemos la modelización matemática del problema. Si cambiamos la red no dirigida que hemos empleado hasta ahora por la nueva red dirigida y añadimos las restricciones de tráfico, podremos resolver este modelo matemático sin dificultad. Además, de este modo se deja abierta la posibilidad de cambiar de una forma muy cómoda las restricciones de tráfico en caso de que esto sea necesario, algo que con la duplicación de nodos se habría convertido en la ardua tarea de reconstruir toda la red.

Por otro lado, es de suponer que al ir en coche cada alumno va acompañado o bien por sus padres o bien por otro adulto responsable de él, quitando la peligrosidad del ir solo al colegio. Por tanto, no tiene sentido el estudio de la seguridad en este medio de trasporte. Aunque sí es importante, cuando hablamos de los desplazamientos en coche, la optimización del tiempo de duración del trayecto. Por todo esto, el único criterio que emplearemos en este caso será el tiempo.

En definitiva, los datos necesarios para el funcionamiento de este modelo son la matriz de pesos "tiempo" que indique el tiempo que se tarda de media en recorrer cada calle en coche, y las restricciones de tráfico de la zona. Dada la extensión y dimensiones del proyecto y las necesidades logísticas del mismo, se hace necesario que el estudio y recogida de datos que se requieren para este caso sean realizados en un proyecto en un futuro próximo, como se propone en el capítulo 4. Al no disponer de los conjuntos de datos necesarios, escribimos aquí la modelización general de este problema, siendo posible resolverlo con cualquier *software* modelizador y optimizador una vez obtenida la información especificada.

$$\min \quad d = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij}$$

sujeto a:

$$\sum_{k=2}^{n} x_{1k} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} x_{kn} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ki} \quad , \quad \forall i \in \{2,\ldots,n-1\}$$

Restricciones de tráfico.

con

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se toma el arco (i,j)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Además, mediante una aplicación adecuada de esta araña por parte de los colegios, se podrían juntar rutas de modo que alumnos que vivan cerca puedan alternar ir en el coche de una familia u otra. Esto supondría varias ventajas: en primer lugar el ahorro económico para las familias al reducir el gasto en transporte. En segundo lugar, pero no por ello menos importante, la reducción de contaminación medioambiental, ya que al reducir el número de coches se reducen las emisiones de $CO2$ que generan estos medios de transporte. Y por último, se crea una conexión entre niños que viven cerca, de modo que en cuanto un niño obtenga la confianza suficiente como para ir sólo al colegio, influya positivamente en su vecino.

3.2 Camino seguro “en transporte público”

El problema del transporte público puede parecer, en cierto modo, parecido al transporte en coche, en tanto que necesitamos un grafo dirigido así como ver la dirección del recorrido. Sin embargo, son dos modelizaciones completamente distintas. La principal diferencia es que, mientras que con un coche es posible elegir entre una ruta u otra, en transporte público las paradas y recorridos están prefijados, teniendo que acomodar el trayecto a las opciones previamente disponibles. Además, no será posible incorporarse o abandonar el trayecto fijado en cualquier momento, sino que deberá hacerse en la parada más cercana al punto de interés. Por tanto, nuestro modo de trabajo será fijar las líneas de transporte en el mapa y obtener las rutas más seguras desde el colegio hasta los distintos puntos de acceso a la red de transporte público.

Para realizar el estudio del camino seguro en transporte público, primero debemos realizar un estudio de los medios disponibles en la zona. En el caso concreto del colegio "Nuestra Señora de la Paloma", contamos con las líneas 3, 17, 18, 23, 31, 35, 50, 60, 65 y 148 de autobús, así como con las bocas de metro Puerta de Toledo, Antón Martín, Tirso de Molina, La Latina y Lavapiés. Para incorporarse a estas líneas de transporte desde el colegio los alumnos deberán desplazarse a pie desde el colegio hasta las distintas paradas. Por ser una ruta a pie, el grafo subyacente será el mismo que el del capítulo 2.

Suponiendo que una vez incorporados a la red de transporte publico el riesgo es mínimo, nuestro objetivo será minimizar el riesgo desde el colegio hasta la parada en la cual se quieran incorporar a la red. Por tanto, deberemos aplicar el algoritmo de Dijkstra con punto inicial el colegio y destino las distintas paradas de autobús y metro, y pesos los mismos criterios de seguridad definidos en el apartado 2.

En este apartado, hemos realizado un estudio de cada una de las líneas que pasan cerca del colegio y hemos aplicado un programa desarrollado específicamente para el uso del transporte público, ya sea autobús o metro, obteniendo así mapas de movilidad como los adjuntos en el anexo E. También se adjunta en el anexo E el enlace al código del programa.

4.- Conclusiones y trabajo futuro

Para finalizar este estudio hay tres cuestiones básicas que deben plantearse. La primera es si hemos cumplido con los objetivos esperados del proyecto. La segunda es, una vez realizada esta investigación en un colegio concreto, cómo comparamos las arañas obtenidas, y qué recomendación final haríamos para ofrecer una o varias de ellas como modelo. Y por último, qué puntos deja esta investigación abiertos a trabajos o proyectos futuros.

Los objetivos que se comentaron en el capítulo 1, pueden resumirse en obtener una modelización que permita automatizar el proceso de construcción de arañas de movilidad, ampliar los criterios de seguridad, y ampliar la aplicación de las arañas de movilidad a distintos medios de transporte. La ampliación de los criterios de seguridad se llevó a cabo en el capítulo 2, dejando una modelización abierta para que pueda ser utilizada con otros criterios de forma que solo sea necesario introducir la matriz de datos correspondiente. Con esto se permite tanto la actualización periódica de datos, como poder aplicar la modelización para otros criterios o incluso aplicarla a otros colegios, reduciendo los nuevos modelos a un estudio de datos. Se cumple así el primer objetivo, automatizando la obtención de arañas en tres pasos: recogida y digitalización de datos, aplicación del *software* desarrollado, y análisis de las arañas obtenidas. En cuanto al último objetivo, se desarrolla por completo en el capítulo 3, dejando abiertas otras líneas de trabajo que se comentarán al hablar de los proyectos futuros.

Cabe destacar, tras el estudio de las diferentes arañas y mapas de movilidad la conveniencia de utilizar un modelo u otro según el uso al que se le vaya a destinar. La aplicación del programa del 'Camino Seguro al Cole en transporte público', está claramente orientada al uso individual de cada familia para conocer los medios de transporte cercanos al centro y sus puntos de acceso, al igual que la aplicación del 'Camino Seguro multicriterio' da la opción a cada familia de obtener una ruta segura en función de su propia valoración de los criterios de seguridad empleados. Sin embargo, las arañas obtenidas mediante la aplicación del algoritmo de Dijkstra están plenamente orientadas para su uso por parte del centro como mapas de movilidad de referencia, y el mapa de movilidad obtenido con la aplicación del algorimo de Kruskal, debería ser aplicado como el mapa de movilidad completo del centro.

En cuanto a los puntos que se dejan abiertos a proyectos futuros, se enumeran y comentan brevemente a continuación:

1. Recogida y análisis de datos en ‘Camino Seguro al Cole en coche’: los datos necesarios para el funcionamiento de este modelo son una matriz de pesos que indique el tiempo que se tarda de media en recorrer cada calle en coche y las restricciones de tráfico de la zona. Dada la extensión y dimensiones del proyecto y las necesidades logísticas del mismo, se hace necesario realizar el estudio y recogida de datos que se requieren para este caso en un proyecto propio.
2. ‘Camino Seguro al Cole en bicicleta’: este medio de transporte entraría dentro de la categoría ‘medio de transporte privado’. Su grafo sería no dirigido, pero sujeto a las condiciones de viabilidad de cada zona, principalmente a la existencia de carril-bici o algún acceso similar. Por tanto, es un subproblema de la modelización realizada en el apartado 3.1 Camino seguro “en coche”, sustituyendo el grafo dirigido por un grafo no dirigido, y las restricciones de tráfico por las restricciones de acceso en bicicleta. Al igual que en el caso del ‘Camino Seguro al Cole en coche’, este proyecto necesitará un estudio de los datos exhaustivo.
3. Asesoramiento por distancias: uno de los grandes intereses del proyecto *Camino Seguro al Cole*, es poder asesorar a las familias. Claramente, un factor clave a la hora de aconsejar un modo u otro de ir al colegio es la distancia que haya entre la casa del escolar y el colegio. Esto se puede lograr con una modelización ”a trozos”, aplicando ‘Camino Seguro al Cole a pie’ en un radio de 4 km del colegio, ‘Camino Seguro al Cole en bici’ en un radio entre 4 y 8 km, y ‘Camino Seguro al Cole en transporte público’ para un radio superior a 8 km, por ejemplo. Se trata de unificar estos modelos y de analizar los criterios aplicables a las fronteras de las coronas circulares.

Bibliografía

Alonso Revenga, Juana M. (2008) *Flujo en Redes y Gestión de Proyectos: Teoría y Ejercicios Resueltos.*, La Coruña, NETBIBLO.

Alonso-Ayuso, A., Pérez, G., Ramos, A. (eds.) (2008) *Optimización bajo Incertidumbre,* Universidad Pontificia de Comillas.

Ayuntamiento de Madrid (ed.) (2012), *Madrid a pie, camino seguro al cole.* [En línea] Consulta en 01/2013 en www.madrid.es/UnidadesDescentralizadas/AreasUrbanas_EducacionAmbiental/ContenidosBasicos/Publicaciones/MadridAPie/QueEsMadridAPie.pdf

Ayuntamiento de Madrid (ed.) (2012), *Madrid a pie, camino seguro al cole: Proyecto educativo*. [En línea] Consulta en 01/2013 en www.madrid.es/UnidadesDescentralizadas/Agenda21/ContenidosBasicos/Publicaciones/MadridAPie/MadridAPieCaminoSeguroColeProyEduc.pdf

Colina, R.; Municio, B.; Gómez-Chacón, I. Mª y López, V. (2013) QMR: Modeling quality mobility routes under uncertainty, XXXIV Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa y las VIII jornadas de Estadística Pública, Castellón, 11-13 de Septiembre de 2013.

Díaz-Madroñero, M., Peidro, D., Mula, J., (2010), *Enfoques de programación matemática fuzzy multiobjetivo: una revisión*, XIV Congreso de Ingeniería de Organización, Donostia, San Sebastián, 8-10 Septiembre 2010. [En línea] Consulta en 04/2013 en http://adingor.es/congresos/web/uploads/cio/cio2010/QUANTITATIVE_METHODS//1649-1658.pdf

Duarte Muñoz, Abraham (2007), *Metaheurísticas*, Madrid, DYKINSON.

Fuente O'Connor, José Luis de la. (1997), *Técnicas de cálculo para Sistemas de Ecuaciones, Programación Lineal y Programación Entera: códigos en Fortran y C con aplicaciones de sistemas de energía eléctrica.* Barcelona, Editorial Reverté.

Maroto,C.; Alcaraz, J. y Ruiz R. (2002), *Investigación Operativa. Modelos y Técnicas de Optimización.* Valencia, UPV.

Martín, Alberto (2012), Un camino seguro de casa al cole, más informático y matemático. *Tribuna Complutense.* [En línea] Consulta en 01/2013 en http://biblioteca.ucm.es/revcul/tribunacomplutense/84/art1323.php

Maurette, M. y Ojea, I. (2006), *Programación Dinámica*. [En línea] Consulta el 03/2013 en http://cms.dm.uba.ar/materias/1ercuat2009/optimizacion/Maurette_Ojea.pdf

Pardalos, Panos M. (ed.) (2000), *Approximation and Complexity in Numerical Optimization. Continuous and Discrete Problems,* Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.

Romero, Carlos (1993), *Teoría de la decisión multicriterio: conceptos, técnicas y aplicaciones*, Madrid, Alianza Editorial.

Rodríguez, Rosa (2002), *Investigación Operativa. Teoría, ejercicios y prácticas con ordenador.* [En línea] Consulta en 03/2013 en http://www.rosaweb.org/descargas/teoriapto.pdf

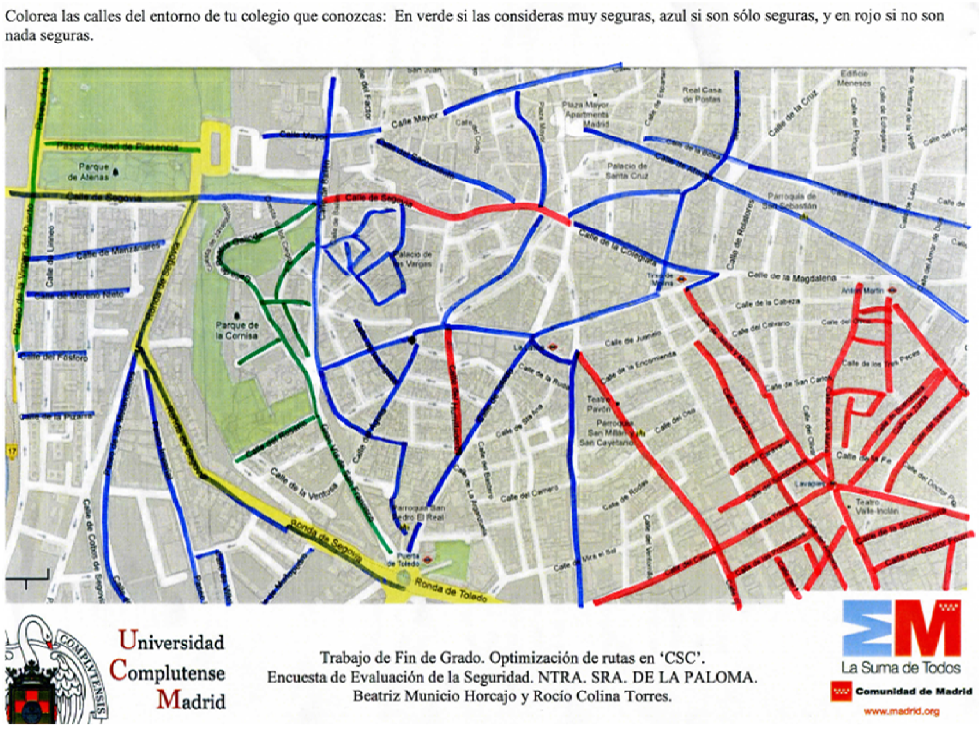
Garfunkel, Solomon (dir.) (1999), *Las matemáticas en la vida cotidiana* (3ª. ed.), Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid.

Wussing, Hans (1998), *Lecciones de Historia de las Matemáticas,* Madrid, Siglo XXI de España Editores.

Anexo A - Tratamiento y recogida de datos: encuestas

Modelo de encuesta realizada para el estudio de la ‘Perspectiva de la Seguridad’:

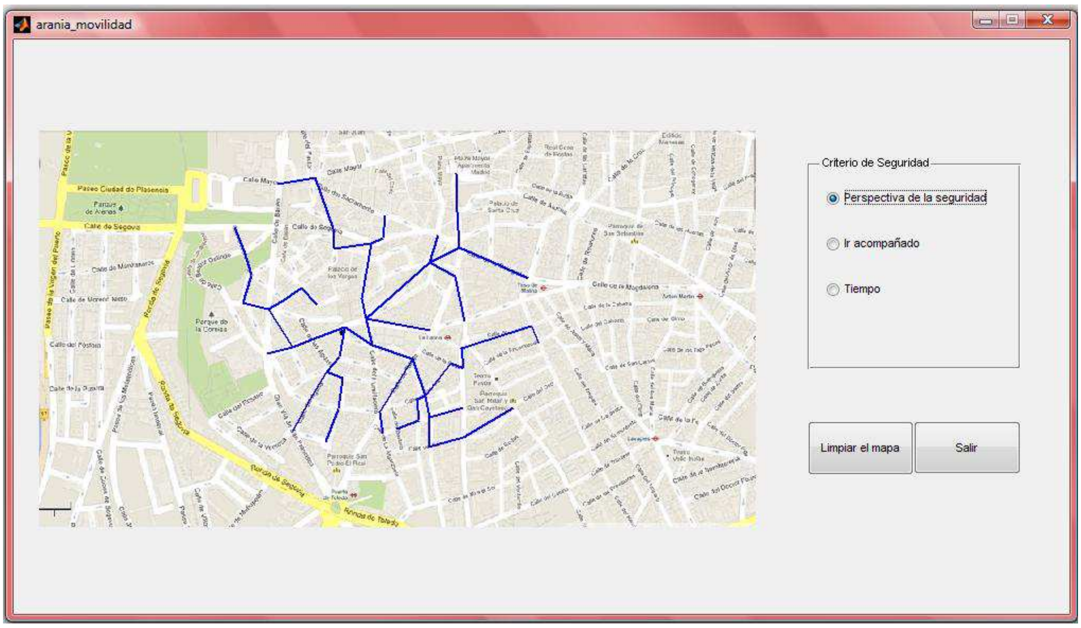
Ejemplo de las respuestas que se obtuvieron en las encuestas:



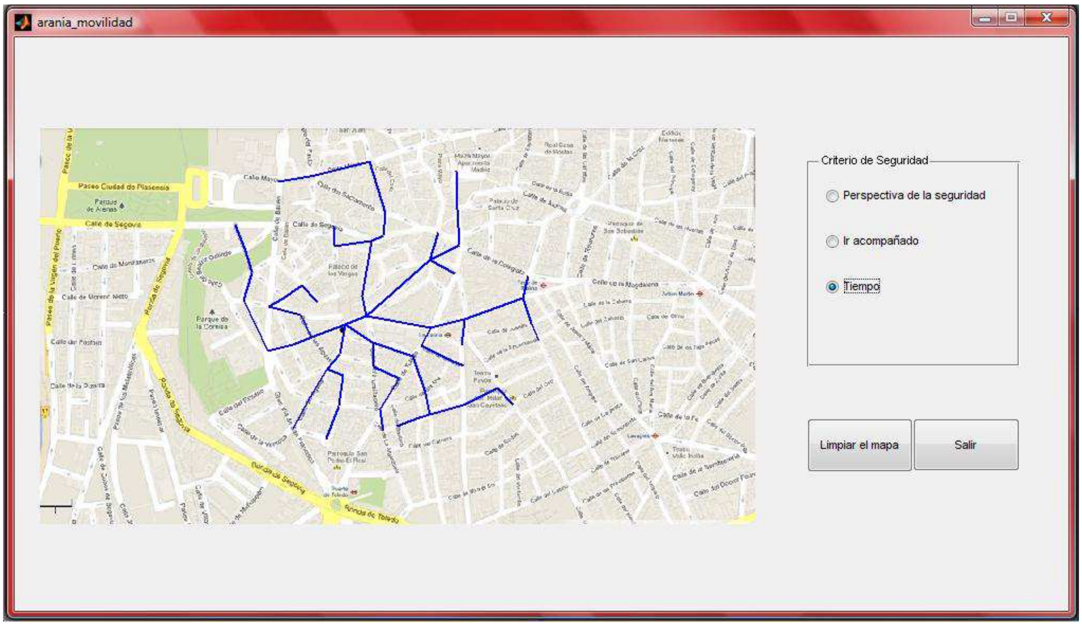
Anexo B - Algoritmo de Dijkstra

Enlace al código del programa: https://sites.google.com/site/codigoscsc/home/dijkstra

Mapa obtenido aplicando como criterio de seguridad ‘Perspectiva de la seguridad’:



Mapa obtenido aplicando como criterio de seguridad ‘Tiempo’:



Anexo C - Algoritmo de Kruskal

Enlace al código del programa: https://sites.google.com/site/codigoscsc/home/kruskal

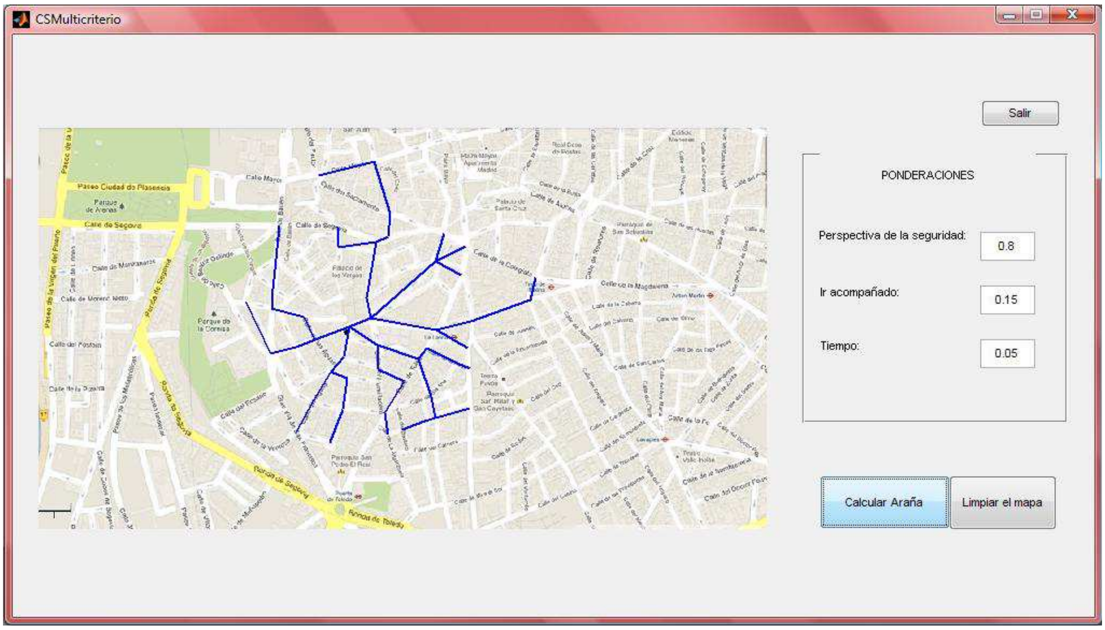
Mapa obtenido aplicando como criterio de seguridad 'Perspectiva de la seguridad':

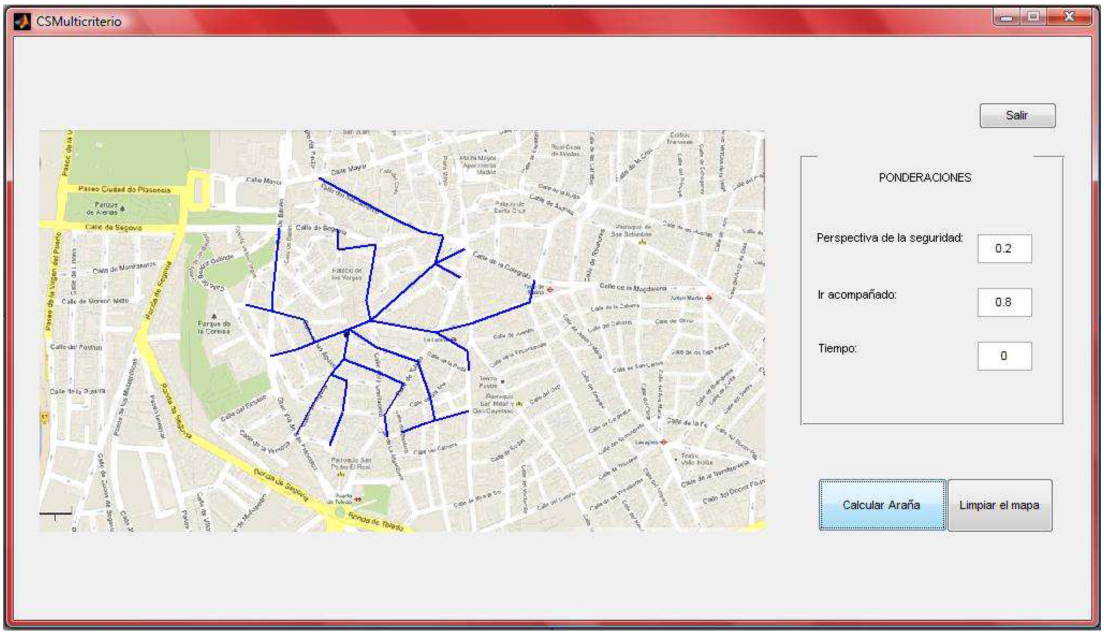
Mapa obtenido aplicando como criterio de seguridad 'Tiempo':

Anexo D – Camino seguro multicriterio

Enlace al código del programa: https://sites.google.com/site/codigoscsc/home/camino-seguro-multicriterio

Imágenes del programa CSMulticriterio:

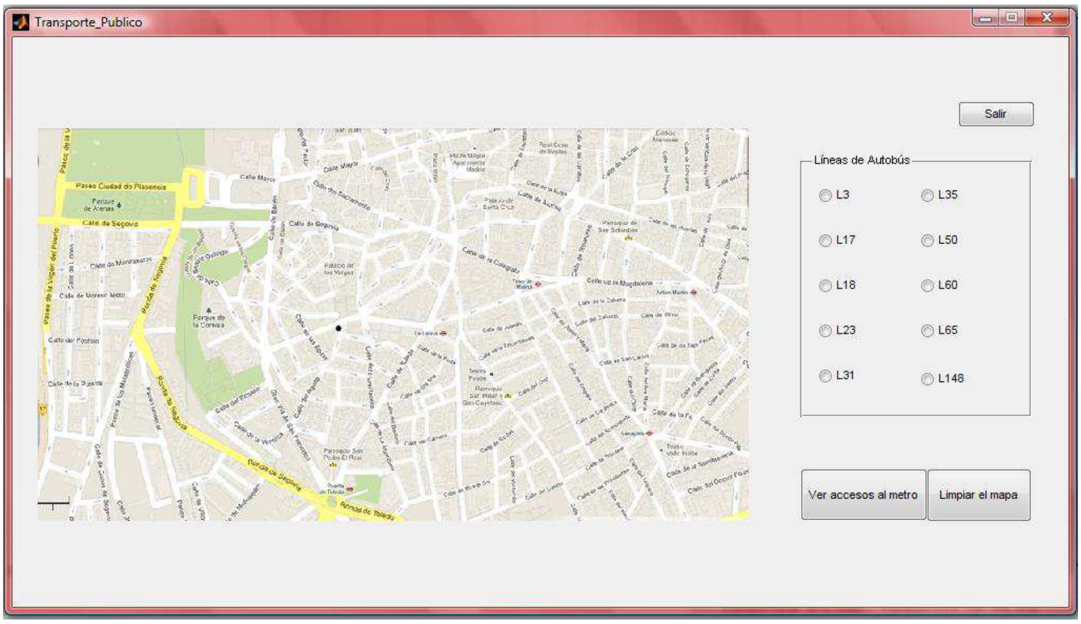




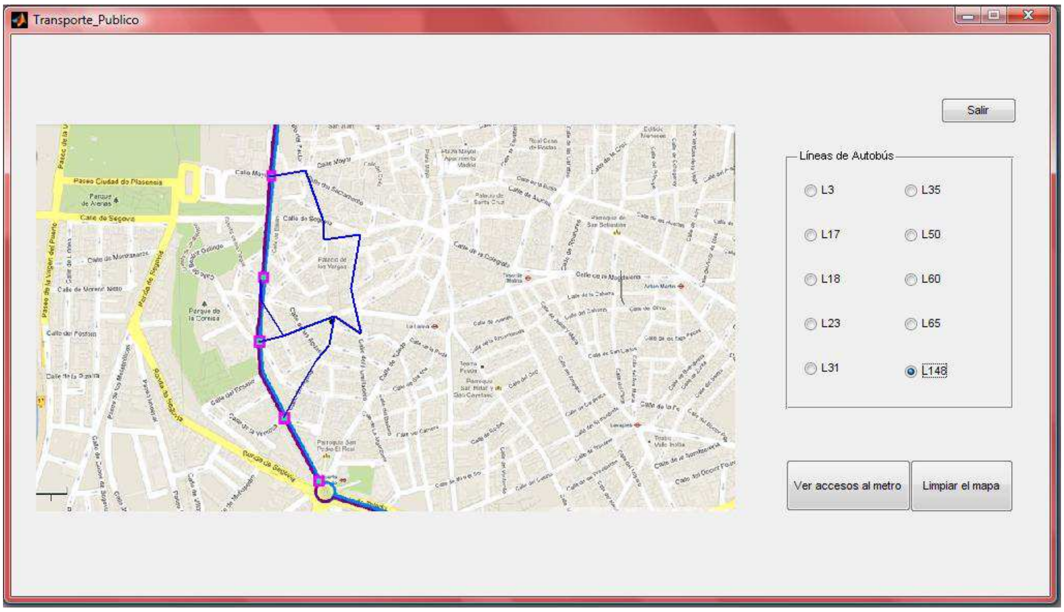
Anexo E – Camino seguro en transporte público

Enlace al código del programa: https://sites.google.com/site/codigoscsc/home/camino-seguro-en-transporte-pblico

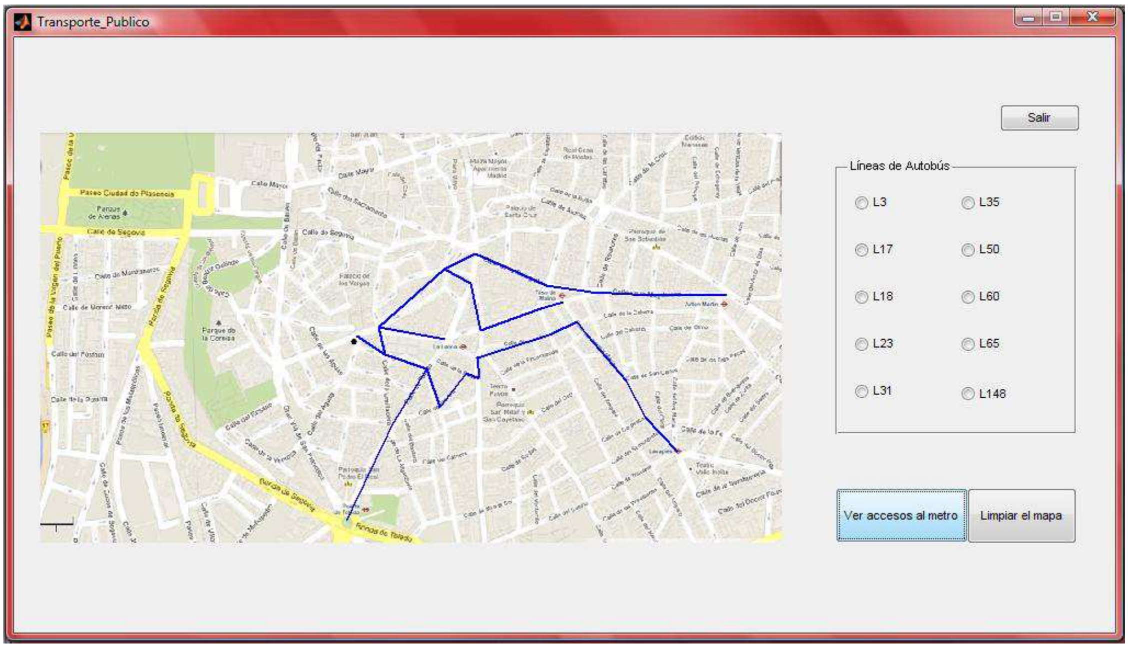
Pantalla inicial del programa Transporte público:



Caminos seguros hasta las paradas de la línea 148 de autobús:



Caminos seguros desde el colegio hasta las bocas de acceso al metro más cercanas:



Caminos seguros a las paradas de la línea 148 y a las bocas de acceso al metro: